

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025
Γ' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

(Ενδεικτικές απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό σελίδα 186

A2. Σχολικό σελίδα 76

A3. Σχολικό σελίδα 161

A4.

α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$ και είναι και παραγωγίσιμη, από θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(1) = 0$ (1)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9, \text{ άρα η } (1) \Rightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Leftrightarrow 2a = -12 \Leftrightarrow a = -6$$

B2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
f'	-	○	-	○	+
f					

$$\Delta_1 = (0,1), \quad \Delta_2 = [1,3], \quad \Delta_3 = (3,+\infty)$$

$$f(\Delta_1) = f((0,1)) \stackrel{\text{αύξουσα,συνεχης.}}{=} (\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)) = (-3,1),$$

$$f(\Delta_2) = f([1,3]) \stackrel{\text{φθίνουσα,συνεχης.}}{=} [f(3), f(1)] = [-3,1],$$

$$f(\Delta_3) = f((3,+\infty)) \stackrel{\text{αύξουσα,συνεχης.}}{=} (\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (3,+\infty),$$

Αφού $0 \in f(\Delta_1)$ και f γν. μονότονη υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Αφού $0 \in f(\Delta_2)$ και f γν. μονότονη υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$

Αφού $0 \in f(\Delta_3)$ και f γν. μονότονη υπάρχει μοναδικό $x_3 \in \Delta_3$ τέτοιο ώστε $f(x_3) = 0$

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές ρίζες

$$\mathbf{B3.} \quad f''(x) = 6x - 12, \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	○	+
f''			

Για $x \in (-\infty, 2]$ η f είναι κυρτή

Για $x \in (2, +\infty]$ η f είναι κοίλη

Στο $x_0=2$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(2,-1)$

B4. Η εφαπτομένη της f στο $A(\xi, f(\xi))$ είναι

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$$

Η εφαπτομένη της f στο $B(\xi, f(\xi))$ είναι

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = g'(\xi)(x - \xi) + g(\xi) \Leftrightarrow$$

$$y = (1 + f'(\xi))(x - \xi) + \xi + f(\xi)$$

εξισώνοντας τις δύο σχέσεις προκύπτει:

$$f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) = (1 + f'(\xi))(x - \xi) + \xi + f(\xi) \Leftrightarrow x = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{x \eta \mu x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$$

$$f(0) = 0$$

Συνεπώς αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$ η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x \eta \mu x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

$$\Gamma 2. \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1)} = \frac{1}{2}, \text{ άρα η } y = x + \frac{1}{2} \text{ πλάγια ασύμπτωτη στο } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \eta \mu x} = 0 \text{ αφού}$$

$$|e^{x \eta \mu x}| \leq e^x \Rightarrow -e^x \leq e^{x \eta \mu x} \leq e^x, \text{ επίσης } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0 \text{ από κριτήριο παρεμβολής έχουμε: } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \eta \mu x} = 0$$

Άρα η y=0 οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$\Gamma 3. f(x) = y \Rightarrow e^{x \eta \mu x} = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{x \eta \mu x} - x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Θεωρώ } g(x) = e^{x \eta \mu x} - x - \frac{1}{2}, x \in [-\pi, 0]$$

Η g συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών

$$g(-\pi) = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$g(0) = -\frac{1}{2} < 0$$

Άρα, από θεώρημα *Bolzano* υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$, δηλαδή η Cf τέμνει την $y = x + \frac{1}{2}$ σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Γ4. Έστω $M(x(t), y(t))$ με $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$ με $x'(t) > 0$

Για

$$y'(t) = x'(t) \Leftrightarrow \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = x'(t) \Leftrightarrow$$

$$2x(t)x'(t) + x'(t) = x'(t)2\sqrt{x^2(t) + x(t)} \Leftrightarrow 4x^2(t) + 4x(t) + 1 = 4x^2(t) + 24x(t) \Leftrightarrow 1 = 0 \text{ αδύνατο}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}}$

$$g'(x) = \frac{F'(x)e^{\ln^2 x} - F(x)e^{\ln^2 x} 2\ln x \frac{1}{x}}{(e^{\ln^2 x})^2} = \frac{f(x)e^{\ln^2 x} - f(x)e^{\ln^2 x}}{(e^{\ln^2 x})^2} = 0$$

Άρα η g σταθερή

Δ2. Στην αρχική σχέση για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 2F(1)\ln 1 = 0$. Η εφαιπτομένη της Cf στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$ επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1) = 2$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} = 2 \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

Η F είναι συνεχής επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2F(x)}{x} = 2 \Leftrightarrow 2F(1) = 2 \Leftrightarrow F(1) = 1$$

Η συνάρτηση g είναι σταθερή επομένως υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x) = c \Leftrightarrow F(x) = cx^{\ln x}, x > 0$. Για $x = 1$ έχουμε $F(1) = c \cdot 1^0 \Leftrightarrow c = F(1) = 1$. Άρα $F(x) = x^{\ln x}, x > 0$.

Δ3. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $F'(x) = e^{\ln^2 x} \frac{2 \ln x}{x}$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Επομένως το πρόσημο της F' εξαρτάται μόνο από το $\ln x$, δηλαδή

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ και}$$

$$F'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$

$$F(x^2) - F(x) + (x - 1)^2 = 0 \text{ για } x > 0$$

Η εξίσωση έχει προφανής ρίζα το $x=1$

Αν $x > 1$, $x^2 > x$ ^{αύξουσα} $F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \Leftrightarrow$

$F(x^2) - F(x) + (x - 1)^2 > 0$ Συνεπώς η εξίσωση είναι αδύνατη

Αν $0 < x < 1$, $x^2 < x$ ^{φθίνουσα} $F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \Leftrightarrow$

$F(x^2) - F(x) + (x - 1)^2 > 0$ Συνεπώς η εξίσωση είναι αδύνατη

Άρα μοναδική λύση το $x=1$

$$\Delta 4. E(\Omega) = \int_1^e |F(x)| dx \text{ η } F(x) > 0 \text{ άρα } E(\Omega) = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx$$

Από εφαρμογή ισχύει $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για $x = \ln^2 x$ έχω

$e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1 \Leftrightarrow F(x) \geq \ln^2 x + 1$ και επειδή η ισότητα ισχύει για $x=1$ από θεώρημα $\int_1^e F(x) dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx$

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx &= [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e 2x \frac{\ln x}{x} dx + [x]_1^e \\ &= e - 2([x \ln x - x]_1^e) + e - 1 = e - 2 + e - 1 = 2e - 3 \end{aligned}$$

Άρα $E > 2e - 3$