ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελίδα 186 σχολικού

Α2. Ορισμός σελίδα 142 σχολικού

Α3. Ορισμός σελίδα 161 σχολικού

Α4.

α. ΣΩΣΤΟ
β. ΣΩΣΤΟ
γ. ΣΩΣΤΟ
δ. ΛΑΘΟΣ
ε. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να ορίζεται η $f \circ g$ πρέπει

$$\begin{cases} x \in [0,+\infty) \\ g(x) \in (0,1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Άρα $A_{f\circ g} = [0,1]$

Επίσης $(f \circ g)(x) = \sqrt{x}^4 - 2\sqrt{x}^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

Επομένως $h(x) = (f \circ g)(x) = (x-1)^2\ ,\ x \in [0,1]$

Β2. Έστω $h(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = y \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} |x-1| = \sqrt{y} \overset{0\leq x\leq 1}{\Longleftrightarrow} -x+1 = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{y}$

Επίσης πρέπει $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le -\sqrt{y} + 1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le y \le 1$

Επομένως $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}\,, x \in [0,1]$

Η $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\,, x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}\,, x = 1 \end{cases}$

Β3.

I. Για να ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών πρέπει η φ να είναι συνεχής στο [0,1] και $\varphi(0) \neq \varphi(1)$

Η φ στο [0,1) είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών

Αφού

$$\varphi(1) = \frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$
άρα $\varphi(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x)$,επομένως η φ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ συνεπώς η φ συνεχής στο [0,1]

Επίσης $\varphi(0) = 1$ άρα

$$\varphi(0) \neq \varphi(1)$$

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών

II. Για $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xLongleftrightarrow{\text{ημ} \uparrow \text{στο } (0,\frac{\pi}{2})} \text{ημ}\frac{\pi}{6} < \text{ημα} < \text{ημ}\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \text{ημα} < 1,$

Το ημα είναι μία ενδιάμεση τιμή μεταξύ των φ(0) και φ(1), άρα από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_0 \in (0,1)$: $\varphi(x_0)$=ημα

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x < -1$:

$$f'(x) = -2 \xLongleftrightarrow{\Sigma.\Theta.M.T} f'(x) = (-2x)'$$

Άρα $f(x) = -2x + c_1$ για κάθε $x \le -1$.

Για κάθε $x > -1$:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \xLongleftrightarrow{\Sigma.\Theta.M.T} f'(x) = (x^3 - x)'$$

Άρα $f(x)=x^3-x+c_2$ για κάθε $x>-1$.

Αφού η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων έχουμε $f(0)=0 \Leftrightarrow c_2=0$

Επομένως έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2+c_1, x\le -1\\ x^3-x, x>-1\end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο -1 συνεπώς $f(-1)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)\Leftrightarrow c_1=-2$

Γ2. Για $x_0>-1$ η εφαπτομένη στο σημείο Α($(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Επειδή διέρχεται από το $(0,-2)$ έχουμε:

$$-2-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0)\Leftrightarrow$$

$$-2-{x_0}^3+x_0=-3{x_0}^2+x_0\Leftrightarrow {x_0}^3=1\Leftrightarrow x_0=1$$

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:$y=2x-2$.

Γ3. Αφού Μ είναι σημείο της (ε) τότε Μ(x, 2x-2)

Και Κ η προβολή του Μ στον x΄x τότε Κ(x,0)

Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ: $E=\frac{MK\cdot K\Gamma}{2}=\frac{(x-2)\cdot(2x-2)}{2}=x^2-3x+2$

Επομένως $E\big(x(t)\big)=x^2(t)-3x(t)+2$

Άρα $E'(t)=2x(t)x'(t)-3x'(t)$ και για $t=t_0$ είναι $x(t_0)=3$ και $x'(t_0)=2$

Άρα $E'(t_0)=2\cdot 3\cdot 2-3\cdot 2=6\,\frac{\mu o\nu^2}{sec}$

Γ4. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{f(x)}\eta\mu\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}\right)\overset{\substack{x\to-\infty\\ u\to 0\\ u=\frac{1}{f(x)}}}{=}\lim_{u\to 0}\left(u\eta\mu\frac{1}{u}\right)=0$

Και

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}\overset{\substack{x\to-\infty\\ y\to+\infty\\ y=-x}}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{y^3+1}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^3-y}{y^3+1}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^3}{y^3}=1.$$

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=0+1=1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

I. Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
f'	$\Vert$	-	0	+	
f'	$\Vert$	↘		↗	

$\Delta_1 = (0,1], \qquad \Delta_2 = (1, +\infty)$

$f(\Delta_1) \overset{\varphi\theta\iota\nu.}{=} \left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = [1 - \ln 3\,, +\infty),$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x - \ln(3x)) = 0 - (-\infty) = +\infty$

$f(\Delta_2) \overset{\alpha\upsilon\xi.}{=} (f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)) = (1 - \ln 3\,, +\infty)$, αφού

$\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \ln(3x)) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln(3x)}{x}\right) = +\infty$ επειδή

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

Αφού $0 \in f(\Delta_1)$και f γν. μονότονη υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Αφού $0 \in f(\Delta_2)$και f γν. μονότονη υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$

II. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$με $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$.

Άρα η f είναι κυρτή.

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\, dx.$$

Όμως για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ είναι $f(x) \neq 0$,η f είναι συνεχής στο (x_1, x_2) συνεπώς από την συνέπεια του θεωρήματος Bolzano έχουμε ότι η f διατηρεί πρόσημο. Επίσης ισχύει $f(1) = 1 - ln\,3 < 0$ επομένως $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$

$$E=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|\,dx=\int_{x_1}^{x_2}(ln\,3\,x-x)\,dx=[x\,ln\,3\,x-x-\frac{x^2}{2}]_{x_1}^{x_2}=$$
$$x_2\,ln(3x_2)-x_2-\frac{{x_2}^2}{2}-x_1\,ln(3x_1)+x_1+\frac{{x_1}^2}{2}$$

Όμως

$f(x_1)=0\Leftrightarrow ln(3x_1)=x_1$
$f(x_2)=0\Leftrightarrow ln(3x_2)=x_2$

Άρα

$$E=x_2\,ln(3x_2)-x_2-\frac{{x_2}^2}{2}-x_1\,ln(3x_1)+x_1+\frac{{x_1}^2}{2}=\frac{{x_2}^2}{2}-\frac{{x_1}^2}{2}-(x_2-x_1)$$
$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$$

Δ3. Έχουμε ότι $E>0\Leftrightarrow x_1+x_2-2>0\Leftrightarrow 2-x_1<x_2$διότι η f δεν είναι σταθερή στο $[x_1,x_2]$

Επίσης $x_1<1\Rightarrow 2-x_1>1$

Άρα έχουμε:

$$2-x_1<x_2\ \overset{\substack{2-x_1,x_2\in(1,+\infty)\\ f\ \text{αύξουσα}}}{\Rightarrow}\ f(2-x_1)<f(x_2)\Rightarrow f(2-x_1)<0$$

Δ4. Αφού η f είναι κυρτή έχουμε :

$$f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2)$$

Με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=x_2$

Όμως $2f(x)+\ln 3-1\geq f(x)\Leftrightarrow f(x)\geq f(1)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν το $x=1$διότι η f έχει ολικό ελάχιστο μόνο στο 1.

Συνεπώς η εξίσωση είναι αδύνατη.