lisari team / Σχολικό έτος 2020 – 21

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΟΚΤΩ (8)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 135)

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή, $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α2. (Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 51)

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Α3. (Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 23)

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$

Α4. α) Σ β) Λ (το σωστό είναι $x \in f(A)$) γ) Σ δ) Σ ε) Σ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Επειδή $f(x+1)=(x+1)e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θέτουμε όπου x το $x-1$ άρα:

$$f(x)=xe^{1-x}.$$

Β2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=(1-x)e^{1-x}$.

Το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$
e^{1-x}	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	Τ.Μ. $f(1)=1$	$\searrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ διότι $f'(x)>0$ για $x\in(-\infty,1)$ και είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ διότι $f'(x)<0$ για $x\in(1,+\infty)$ και είναι συνεχής $[1,+\infty)$.

Έχει τοπικό μέγιστο για $x=1$ το $f(1)=1$.

Β3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f''(x)=-e^{1-x}-(1-x)e^{1-x}=e^{1-x}(-1-1+x)=(x-2)e^{1-x}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$
e^{1-x}	$+$		$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	Σ.Κ. $\left(2,\frac{2}{e}\right)$	$\smile$

Η f είναι κοίλη στο $x \in (-\infty, 2]$ και κυρτή για $x \in [2, +\infty)$. Η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 2$ το σημείο $\left(2, \frac{2}{e}\right)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Έχουμε,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(e^{1-x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \underset{DHL}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^{x-1}}\right) = 0$$

η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 0$.

Επίσης,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$$

άρα η C_f δεν έχει πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

B4. (i) Είναι,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(xe^{1-x}\right) = -\infty$$

διότι $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} \underset{u \to -\infty}{\overset{u=1-x}{=}} \lim\limits_{u \to +\infty} e^{u} = +\infty$.

Έστω $A_1 = (-\infty, 1]$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$$

και $A_2 = (1, +\infty)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής άρα

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to 1^+} f(x)\right) = (0, 1).$$

Επομένως,

$$f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$$

Άρα σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 1]$.

(ii) Για την εξίσωση $f(x) = \lambda \ (1)$ έχουμε,

- Αν $\lambda \le 0$ τότε $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \notin f(A_2)$ άρα η εξίσωση (1) έχει μία ρίζα.
- Αν $0 < \lambda < 1$ τότε $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες.
- Αν $\lambda = 1$ τότε $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \notin f(A_2)$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα τη $x = 1$.
- Αν $\lambda > 1$ τότε $\lambda \notin f(A_1)$ και $\lambda \notin f(A_2)$ άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η αx^3-3x^2-x+1 είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική άρα και στο $(-\infty,0]$. Η $\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως τριγωνομετρική, άρα και στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$. Επίσης,

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\alpha x^3-3x^2-x+1\right)=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x=1$
- $f(0)=1$

άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0=0$, επομένως είναι συνεχής στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ακόμα,

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\alpha x^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x\left(\alpha x^2-3x-1\right)}{x}=-1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ2. (i) Έχουμε,

- η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$.
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=-\eta\mu x$
- $f(0)=1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0$ άρα $f(0)\neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Επομένως, η συνάρτηση f δεν ικανοποιεί την τρίτη προϋπόθεση του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$.

(ii) Για $\xi\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε,

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow -\eta\mu\xi=0\Leftrightarrow \eta\mu\xi=0\overset{\xi\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}\xi=\pi.$$

Γ3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0<0$ είναι

$$f'(x_0)=3\alpha x_0^{\,2}-6x_0-1$$

Όμως, το τριώνυμο $3\alpha x_0^{\,2}-6x_0-1$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=36+12\alpha=12(3+\alpha)<0 \text{ εφόσον } \alpha<-3,$$

άρα

$$f'(x_0) < 0 \text{ για κάθε } x_0 \in (-\infty, 0) \text{ δηλαδή } f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x < 0.$$

Επομένως, στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ4. Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1 < 0$.

Για κάθε $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$ είναι $f'(x) = -\eta\mu x$.

Το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f			↘			↗	

Άρα η f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \pi]$, αφού f συνεχής στο $(-\infty, \pi]$ και ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0) \cup (0, \pi)$
- γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ αφού f συνεχής στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Έχουμε για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$,

$$x < \pi \Leftrightarrow f(x) > f(\pi) \Leftrightarrow f(x) > -1$$
$$x > \pi \Leftrightarrow f(x) > f(\pi) \Leftrightarrow f(x) > -1$$

Για $x = \pi$ ισχύει

$$f(x) = f(\pi) \Leftrightarrow f(x) = -1$$

Άρα ισχύει $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$K(x) = \ln x - \frac{1}{x} \text{ με } x > 0.$$

Η $K(x)$ είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά συνεχών και

$$K(1) = -1 < 0 \text{ , } K(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0$$

άρα

$$K(1)K(e) < 0$$

οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε:

$$K(x_0) = 0 \text{ δηλαδή } \ln x_0 = \frac{1}{x_0}.$$

Επιπλέον,

$$K'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

οπότε η K είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Δ2. Είναι,

$$f(x) = (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1,\ x > 0.$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με :

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} \text{ και } f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Οπότε,

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f'(x_0) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} x = x_0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} x > x_0$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} x < x_0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$, συνεπώς παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση x_0, το

$$f(x_0) = (\ln x_0)(x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = x_0 \ln x_0 + \cancel{\ln x_0} - \cancel{\ln x_0} - 1 = 0,$$

διότι από ερώτημα Δ1 έχουμε:

$$\ln x_0 = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 \ln x_0 = 1.$$

Δ3. Αρχικά θα δείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Για $x \le 0$ είναι

$$g(x) \le 0 < h(x)$$

άρα η εξίσωση $g(x) = h(x)$ είναι αδύνατη.

Για $x > 0$ έχουμε:

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow xe^{-x}=\frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}}\Leftrightarrow xe^{-x}e^{x+1}=x_0^{x+1}\Leftrightarrow xe=x_0^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln(xe)=\ln x_0^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln x+\ln e=(x+1)\ln x_0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x_0)(x+1)-\ln x-1=0$$

$$\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$$

διότι από το Δ2 ερώτημα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=x_0$ το $f(x_0)=0$.

Α΄ τρόπος (αναλυτικά)

Για να έχουν οι g και h κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο αρκεί να δείξουμε ότι

$$g'(x_0)=h'(x_0)$$

Έχουμε,

$$g'(x)=\left(xe^{-x}\right)'=e^{-x}-xe^{-x}$$

και

$$h'(x)=\left[\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\right]'=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\left[\ln x_0-1\right]\overset{(\Delta_1)}{=}\frac{x_0^x\cdot x_0}{e^x\cdot e}\left(\frac{1}{x_0}-1\right)=\frac{x_0^x(1-x_0)}{e^x\cdot e}$$

Οπότε

$$g'(x_0)=h'(x_0)\Leftrightarrow e^{-x_0}-x_0e^{-x_0}=\frac{x_0^{x_0}(1-x_0)}{e^{x_0}\cdot e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}}=\frac{x_0^{x_0}(1-x_0)}{e^{x_0}\cdot e}$$

$$\overset{x_0\in(1,e)}{\Leftrightarrow} x_0^{x_0}=e\Leftrightarrow \ln x_0^{x_0}=\ln e$$

$$\Leftrightarrow x_0\ln x_0=1$$

$$\overset{(\Delta 1)}{\Leftrightarrow} x_0\frac{1}{x_0}=1$$

Β΄ τρόπος

Για κάθε $x>0$ θα λύσουμε την εξίσωση:

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow \ln g(x)=\ln h(x)\Leftrightarrow \ln h(x)-\ln g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0$$

Για τη συνάρτηση

$$f(x)=\ln h(x)-\ln g(x),\ x>0$$

έχουμε:

$$f(x_0)=0\Leftrightarrow g(x_0)=h(x_0)$$

και από το ακρότατο της f στο x_0 έχουμε:

$$f'(x_0)=0\Leftrightarrow \frac{h'(x_0)}{h(x_0)}-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}=0\Leftrightarrow \frac{h'(x_0)}{h(x_0)}=\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}\overset{g(x_0)=h(x_0)}{\Leftrightarrow} g'(x_0)=h'(x_0).$$

Συνεπώς έχουμε ότι $g(x_0)=h(x_0)$ και $g'(x_0)=h'(x_0)$ άρα οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

Δ4. Η (κατακόρυφη) απόσταση των A και B είναι:

$$G(x)=|f(x)-\varphi(x)| \text{ και } f(x)>\varphi(x), \text{ για κάθε } x>0,$$

άρα

$$G(x)=f(x)-\varphi(x),\ x>0$$

- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε και η G είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με

  $$G'(x_0)=f'(x_0)-\varphi'(x_0)$$

  όπου στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ παρουσιάζει ελάχιστο, από το θεώρημα του Fermat, θα ισχύει ότι :

  $$G'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)-\varphi'(x_0)=0 \Leftrightarrow \varphi'(x_0)=f'(x_0)\ (1)$$

  Όμως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, άρα $f'(x_0)=0$. Από τις ισότητες (1) και (2), προκύπτει ότι:

  $$\varphi'(x_0)=0$$

  που σημαίνει ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.
- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.