ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει $|\eta\mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, για κάθε $x \in A$.

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή, Μ, και μια ελάχιστη τιμή, m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{1-x},\quad x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 3

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 4).

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^3-3x^2-x+1, & x\le 0\\ \sigma\upsilon\nu x, & 0<x\le\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$, με $\alpha<-3$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\ell n x = \frac{1}{x} \qquad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα, x_0, η οποία ανήκει στο (1, e).

Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x) = \left(\ell n x_0\right) \cdot (x+1) - \ell n x - 1$.

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \cdot e^{-x}, \; x \in \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, \; x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x) > \varphi(x)$, για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τα σημεία $A\left(x, f(x)\right)$ και $B\left(x, \varphi(x)\right)$, με $x > 0$. Αν η απόσταση των σημείων A και B γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ